Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Dr. Daniel Palacin — Wintersemester 2018/2019

Bewertete Körper
Blatt 4
Abgabe: 19.11.2018

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Sei G eine angeordnete Untergruppe von $(\mathbb{R}, +, <)$.

(a) Falls $G \cap (0, \frac{1}{k})$ dicht in $(0, \frac{1}{k})$ für jedes k aus $\mathbb{N}$, zeige, dass G dicht in $\mathbb{R}$ ist.

HINWEIS: $(\mathbb{R}, +, <)$ ist archimedisch.

(b) Schließe daraus, wenn G nicht trivial, dass entweder G ein kleinstes positives Element besitzt oder G dicht ist.

HINWEIS: Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^{>0}$ besitzt ein Infimum in $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte).
Eine abelsche Gruppe $(\Gamma, +, 0)$ ist *angeordnet*, falls es eine totale Ordnung $<$ auf Γ kompatibel mit der Gruppenoperation gibt:

$$\text{Falls } \gamma < \delta \text{ und } 0 < \epsilon, \text{dann ist } \gamma + \epsilon < \delta + \epsilon.$$

(a) Zeige, dass jede angeordnete abelsche Gruppe torsionsfrei ist.

(b) Beschreibe alle konvexen Untergruppen von $(\mathbb{R}, +, 0)$.

(c) Zeige, dass die Kollektion konvexer Untergruppen der angeordneten abelschen Gruppe Γ linear geordnet bezüglich Inklusion ist.

(d) Zeige, dass Γ keine echte konvexe Untergruppe endlichen Indexes besitzt.

(e) Falls $H \leq \Gamma$ konvex ist, zeige, dass Γ/H auch eine angeordnete Gruppe ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

(a) Seien Γ_1 und Γ_2 zwei abelsche angeordnete Gruppen vom Rang n, beziehungsweise m. Bestimme den Rang der Gruppe $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ mit der lexikographischen Ordnung.

(b) Was ist der Rang von $(\underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n}, +)$ mit der lexikographischen Ordnung ?

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.29 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 10 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.